



# Mobilité des facteurs et répartition des revenus

Gabriel Colletis, Adrien Blanchet, Nicolas Piluso, Mehdi Badra

► **To cite this version:**

Gabriel Colletis, Adrien Blanchet, Nicolas Piluso, Mehdi Badra. Mobilité des facteurs et répartition des revenus. 2016. <hal-01405330>

**HAL Id: hal-01405330**

**<https://hal-univ-tlse2.archives-ouvertes.fr/hal-01405330>**

Submitted on 30 Nov 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Mobility and income distribution

By Gabriel Colletis\*, Adrien Blanchet‡, Nicolas Piluso†, and Mehdi Badra§

\*University of Toulouse Capitole, CNRS-Lereps

Email: [Gabriel.Colletis@ut-capitole.fr](mailto:Gabriel.Colletis@ut-capitole.fr)

‡ CNRS-GREMAQ, Toulouse School of Economics, University of Toulouse Capitole

Email : [Adrien.Blanchet@ut-capitole.fr](mailto:Adrien.Blanchet@ut-capitole.fr)

† CNRS-CERTOP, University of Toulouse Jean Jaures and Paul Sabatier

Email: [nicolas.piluso@iut-tlse3.fr](mailto:nicolas.piluso@iut-tlse3.fr)

§ CNRS-LMAP, University of Pau and the Adour region

Email: [mehdi.badra@univ-pau.fr](mailto:mehdi.badra@univ-pau.fr)

### ABSTRACT :

This article presents a model for income distribution among factors of production in the context of a globalised economy. Previous models are most often static and do not take into account the geographical location of the factors of production nor the mobility costs that result. We have created a dynamic Nash bargaining model that integrates the geographical distance between companies and the mobility costs for each production factor. The main result of this model is that income distribution closely depends on mobility costs: production factors with low mobility costs are those whose incomes increase most rapidly.

JEL: E25, F20, F40

Key words: factors of production, income, mobility costs.

## **Mobilité des facteurs de production et répartition des revenus**

### Introduction

La question des déterminants de la répartition des revenus des « facteurs de production » est sans doute une des questions les plus controversées en économie.

Dans la plupart des analyses et des modèles, cette question est appréhendée comme si ces facteurs étaient immobiles dans l'espace.

Dans cet article, nous considérons qu'ils sont au contraire mobiles mais que leur vitesse potentielle de mobilité est différenciée.

Il s'agit en effet de proposer un nouveau modèle permettant de rendre compte de la répartition des richesses entre les différents facteurs de production. Loin d'être rémunérés en fonction de leur contribution marginale à la production, la capacité des facteurs à capter une partie de la richesse créée dépendra de leur vitesse de mobilité. Le développement et l'ouverture des marchés financiers, en augmentant considérablement la liquidité et la mobilité du capital financier, a autorisé une distorsion du partage des richesses en faveur de ce dernier, au détriment des facteurs les moins mobiles, comme c'est le cas par exemple en France (Cotis, 2009).

Nous partons de l'hypothèse qu'il existe non pas deux mais quatre « facteurs » caractérisés par des vitesses de mobilité différentes. Le capital financier peut être considéré comme totalement volatile ; le capital productif et le travail qualifié ont une vitesse de mobilité plus faible en raison d'un certain nombre de barrières et coûts de déplacement. Ils restent malgré tout nomades ; enfin, le travail non qualifié, dont les coûts de mobilité sont relativement élevés, peut être considéré comme le facteur le plus stable.

On suppose que la vitesse de mobilité est directement déterminée par le coût de la mobilité. Ainsi, lorsque le coût de déplacement est nul, la vitesse de mobilité est absolue.

Nous en déduisons que la rémunération des différents facteurs doit dépendre de leur mobilité différentielle, donc des coûts relatifs liés à leur déplacement, car le potentiel différencié de mobilité des facteurs confère à ceux-ci une capacité de marchandage<sup>1</sup>. Le facteur dont le coût de déplacement est nul est ainsi doté d'une capacité à s'octroyer une grande partie de la richesse créée. A l'inverse, les facteurs qui subissent de forts coûts à la mobilité sont dans l'impossibilité de négocier une rémunération élevée. Ainsi, les facteurs les plus mobiles sont rémunérés en premier, au détriment des facteurs les moins mobiles qui récoltent le « résidu » des richesses créées.

Le modèle bien connu de marchandage de Nash [1950], sur lequel nous nous appuyerons, se traduit de la façon suivante : si on considère  $K$  agents qui doivent partager une certaine quantité de bien  $V$ , alors la rémunération des participants à la négociation est l'unique solution du programme :

$$(W^1, \dots, W^K) = \text{Arg max} \prod_{k=1}^K (W^k - \theta^k) [1]$$

sous les contraintes

-de rationalité individuelle :  $W^k > \theta^k$  pour tout  $k \in \{1, \dots, K\}$

-d'égalité de la somme des rémunérations et du volume du bien à partager, soit:  $\sum_{k=1}^K W^k = V$ ,

où  $V$  (le volume de bien à partager) and  $\theta^k$  (l'option extérieure) sont tous deux exogènes.

---

<sup>1</sup>La mobilité confère aux actifs un pouvoir de sanction sur le marché dans lequel elle se déploie. Le marché financier exerce une pression sur les entreprises grâce à son extrême mobilité. Les entreprises exercent elles-mêmes une pression sur les pouvoirs publics grâce à leur possibilité de se délocaliser.

Les applications de ce modèle sont tellement nombreuses qu'il serait impossible ici d'en rendre compte de façon exhaustive. Donnons cependant quelques exemples significatifs.

Ce modèle a été utilisé dans plusieurs travaux relatifs à la détermination des salaires et de l'emploi. Le modèle du « droit à gérer » (Nickell and Andrews [1983]) montre comment le salaire des employés est négocié entre un syndicat et l'employeur, ce dernier conservant la prérogative de l'embauche. Le résultat principal de cette analyse est que des chocs sur la productivité des entreprises ou le prix de vente des firmes n'affectent pas le salaire négocié. Ils provoquent uniquement des ajustements de l'emploi. Cette propriété permettrait, selon Bruno et Sachs [1985], d'expliquer la rigidité des salaires réels constatée dans les pays de l'OCDE à la fin des années 70 et au début des années 80. Cette approche a été reprise par Layard, Nickell et Jackman [1990] pour construire le modèle WS PS bien connu en macroéconomie.

Par ailleurs, le modèle de « Nash bargaining » a été utilisé abondamment pour rendre compte des décisions familiales des ménages (Manser et Brown [1980], McElroy et Horney [1990]) ou des décisions des ménages en matière d'offre de travail (Bargain et Moreau, [2005], Donni, [2003], Clark, Couprie et Sofer [2004]).

De façon plus théorique, le modèle de Nash présenté ci-dessus a connu de nombreuses extensions : modèles statiques en information incomplète (Rubinstein [1985]), modèles dynamiques en information complète (Rubinstein [1982], Binmore, Rubinstein et Wolinsky [1985]), modèles dynamiques en information incomplète (Rubinstein et Volinsky, [1985], voir aussi Rocher, [1988]).

Aujourd'hui, une approche similaire est adoptée pour rendre compte de la rémunération élevée des traders dans un contexte d'économie financiarisée. Par exemple, Godechot [2008] interprète la sur-rémunération des traders comme le résultat d'une négociation entre ces

derniers et les firmes qui les emploient. Les premiers font valoir une menace d' « exit » s'ils n'obtiennent pas satisfaction en matière de rémunération. Or, un tel départ est toujours posé comme dommageable pour l'employeur étant donné que chaque trader emporte avec lui une partie de l'activité de l'entreprise (clients, technologie, savoir-faire). C'est finalement leur grande possibilité de mobilité qui confèrerait aux traders leur pouvoir de captation de la valeur ajoutée.

Dans la lignée de cette recherche, l'objet de cet article est de rendre compte la répartition des revenus entre agents économiques reliés à des firmes disposées en différents points de l'espace. Nous souhaitons analyser l'impact des différences dans les coûts de déplacement sur la répartition du bien à partager  $V$ .

Dans une première section, nous présentons les caractéristiques de notre modèle de marchandage spatial avec options extérieures endogènes, puis sa dynamique dans une seconde section. Dans une troisième section, nous présentons les résultats de nos simulations, puis nous les discutons lors d'une quatrième et dernière section.

### **1. Un modèle de marchandage spatial avec options extérieure endogènes**

Nous considérons une économie composée de plusieurs firmes distantes l'une de l'autre sur un espace discret  $\{X_1, \dots, X_N\} \in \mathfrak{R}^N$ . Cette location est exogène au modèle. Par souci de simplification du modèle, on suppose que toutes les firmes sont alignées, mais qu'elles peuvent appartenir à différents secteurs d'activité.

Dans chaque firme se « combinent » différents « facteurs de production » dont chaque type est noté  $k \in \{1, \dots, K\}$ . Chaque firme située en  $X_i$  a une contrainte budgétaire  $V_i$  et les différents facteurs qui la constituent entrent dans une procédure de négociation à la Nash pour

fixer leur rémunération. Pour tout  $i \in \{1, \dots, N\}$ , les facteurs de type  $k$  obtiennent une rémunération  $W_i^k$ , qui est le résultat du programme de maximisation suivant:

$$(W_i^1, \dots, W_i^K) = \text{Arg max} \prod_{k=1}^K (W_i^k - \theta_i^k) [2]$$

L'extension la plus évidente du modèle présenté ci-dessus consiste à endogénéiser l'option extérieure  $\theta_i^k$ . Nous souhaitons en effet introduire l'effet de la concurrence entre firmes en matière de rémunération des facteurs de production. Pour ce faire, on considère que l'option extérieure  $\theta_i^k$  dépend de la rémunération du facteur de même type dans toutes les autres firmes, mais aussi du coût de mobilité que doit subir le facteur pour passer d'une firme à l'autre. L'option extérieure pour un facteur de type  $k$  au point  $X_i$  est donné par :

$$\theta_i^k = \text{Max} \{ W_{i'}^k - c^k |X_i, X_{i'}| \}$$

$$i' \in \{1, \dots, N\}$$

où  $|X_i, X_{i'}|$  mesure la distance entre  $X_i$  et  $X_{i'}$ , et  $c^k |X_i, X_{i'}|$  est le coût pour un facteur de type  $k$  pour se déplacer de  $X_i$  à  $X_{i'}$ .

Pour simplifier, on suppose que les fonctions  $c^k$  sont linéaires. Ainsi, on a :  $c^k(|X_i, X_{i'}|) = c^k \cdot |X_i - X_{i'}|$  où  $c^k$  est une constante qui ne dépend que du type de facteur de production considéré. Cela permet de formaliser l'idée selon laquelle le coût de mobilité est

différent d'un type de facteur à l'autre. On suppose sans perdre en généralité que  $c^1(=0) < c^2 < c^3 < c^4$ .

## 2. La dynamique du modèle

Dans cet article, nous nous intéressons à la dynamique des rémunérations pour chaque type de facteur de production durant la négociation.

Soit  $W_i^k(t)$  la rémunération obtenue par le facteur de type  $k$  localisé en  $X_i$  au temps  $t$ . La rémunération initiale  $W_i^k(0)$  de tous les facteurs en différentes positions de l'espace est

donnée, ainsi que  $V_i = \sum_{k=1}^K W_i^k(0)$ , représentant la valeur ajoutée de la firme située en  $X_i$ . Cette

valeur ajoutée est créée grâce à la contribution productive des facteurs de production qui entrent dans la négociation. Dans chaque firme, leur rémunération est donc complémentaire.

À chaque étape du marchandage  $t$ , la négociation de Nash se déroule simultanément dans chaque firme pour tout  $i$ :

$$W_i^1(t+1), \dots, W_i^K(t+1) = \text{Arg max} \prod_{k=1}^K (W_i^k - \theta_i^k(t)) \quad [3]$$

où

$$\theta_i^k(t) = \max \left\{ W_{i'}^k(t) - c^k(|X_i - X_{i'}|) \right\}$$

$$i' \in \{1, \dots, N\} \setminus \{i\}$$

Il est à noter que dans la contrainte de budget, la valeur ajoutée  $V_i$  reste constante au cours du temps.



Il est facile de voir qu'à chaque période, notre problème [3] n'a pas toujours de solution. C'est le cas lorsque la contrainte  $V_i = \sum_{k=1}^K W_i^k(t)$  ne peut être satisfaite (lorsqu'il y a par exemple un déséquilibre trop important entre deux localisations proches).

Supposons par exemple deux facteurs de production 1 et 2 ( $k=2$ ) et deux localisations ( $i=2$ ) distantes de 1. En  $i=1$ , le facteur 1 et le facteur 2 ont tous deux un revenu de 1 (donc  $V_1=2$ ). En  $i=2$ , les deux facteurs ont un revenu de 10. La contrainte du problème impose que les facteurs en  $i=1$  voudront tous deux un revenu de plus de 8 ( $10-2$ ), ce qui est impossible avec une valeur ajoutée  $V_1=2$ .

Dans les cas où la solution existe, la solution analytique est explicitement donnée par :

$$W_i^k(t+1) = \frac{1}{K} \left[ V(j+1) - \sum_{k'=1}^K \theta_i^{k'}(j) \right] + \theta_i^k(t) [4]$$

### 3. Application du modèle

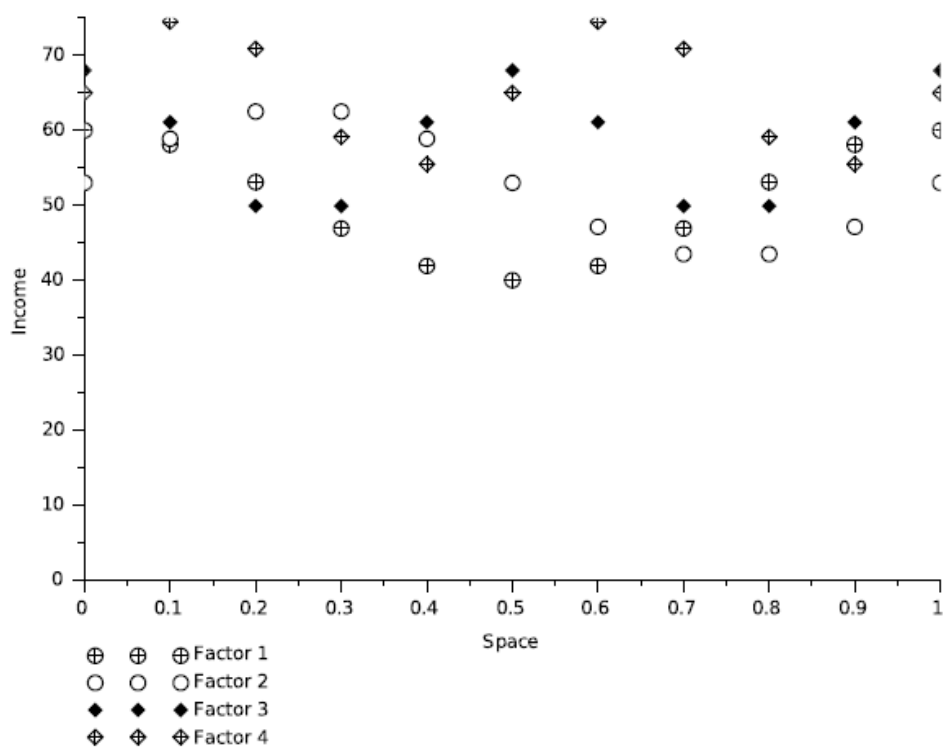
Nous considérons quatre types de facteurs de production. Chaque type de facteur se caractérise par un coût de mobilité particulier. On suppose une équirépartition des agents dans les firmes  $\{X_{i \in \{1, N\}}\}$  qui sont alignées. On considère que le coût pour un facteur de type  $k \in \{1, \dots, K\}$  de se déplacer  $X_i$  à  $X_{i'}$  est égal à :

$$c^k(|X_i, X_{i'}|) = c^k \cdot |X_i - X_{i'}| \text{ où } 0 = c^1 < c^2 < \dots < c^K.$$

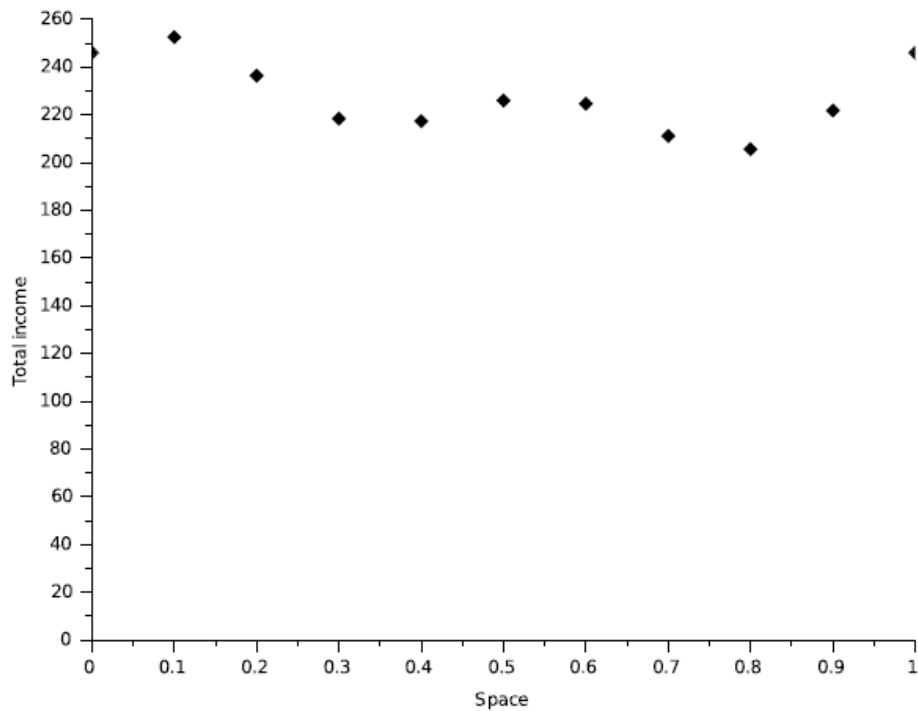
La typologie des facteurs est la suivante: le facteur 1 renvoie au capital financier détenu par les actionnaires (la rémunération est le dividende), le facteur 2 renvoie au capital productif dont est responsable le manager (la rémunération est le profit net), le facteur 3 renvoie aux salariés qualifiés et le facteur 4 renvoie aux salariés non qualifiés (ils perçoivent un salaire).

Nous considérons que les facteurs ne se différencient que par leur coût de mobilité. Leur poids dans la négociation est identique, et il n'existe pas d'asymétrie particulière entre managers et actionnaires d'un côté, salariés de l'autre, outre leur degré de mobilité. Cette simplification est réalisée dans le but d'isoler l'effet particulier du degré de mobilité sur la répartition.

On suppose que le coût de mobilité s'élève à 5 pour le capital financier, 15 pour le capital productif géré par le manager, 15 pour les salariés qualifiés et 25 pour les salariés non qualifiés. Le revenu initial des agents est représenté dans la figure 1. La valeur ajoutée totale dans les firmes est représentée dans la figure 2.

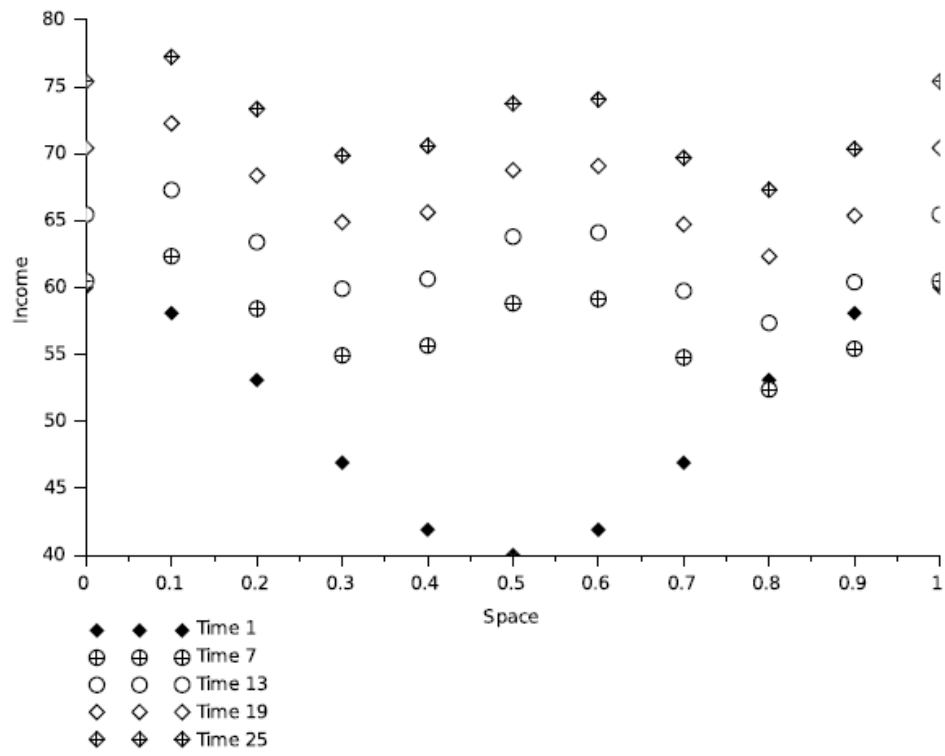


**Fig. 1.** Revenu initial des agents

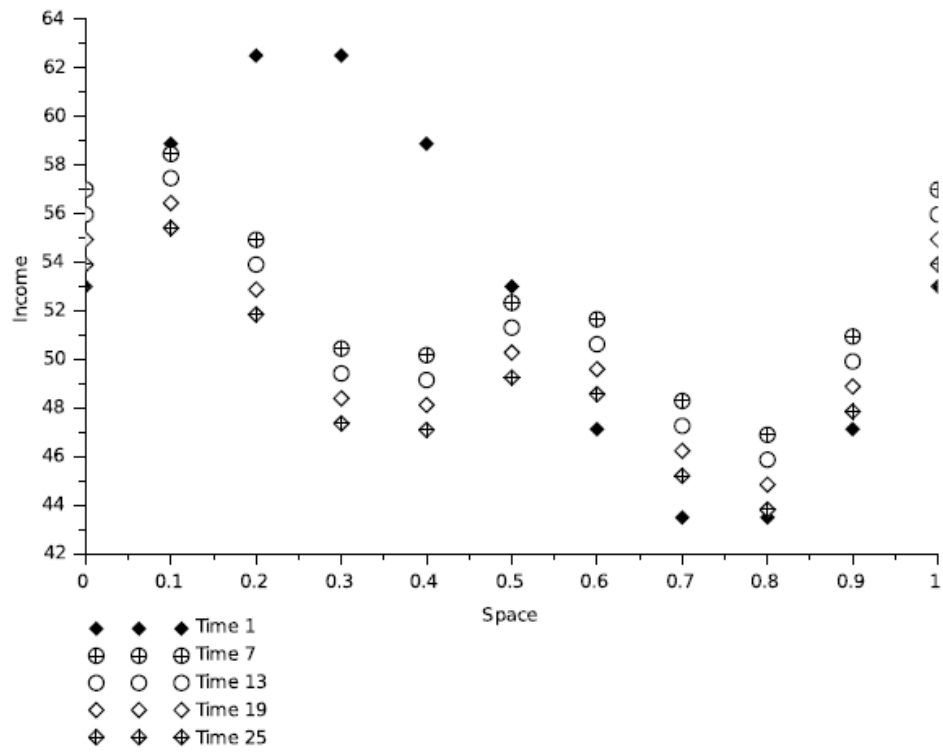


**Fig. 2.** Distribution de la valeur ajoutée dans chaque firme (le revenu total est constant à travers le temps)

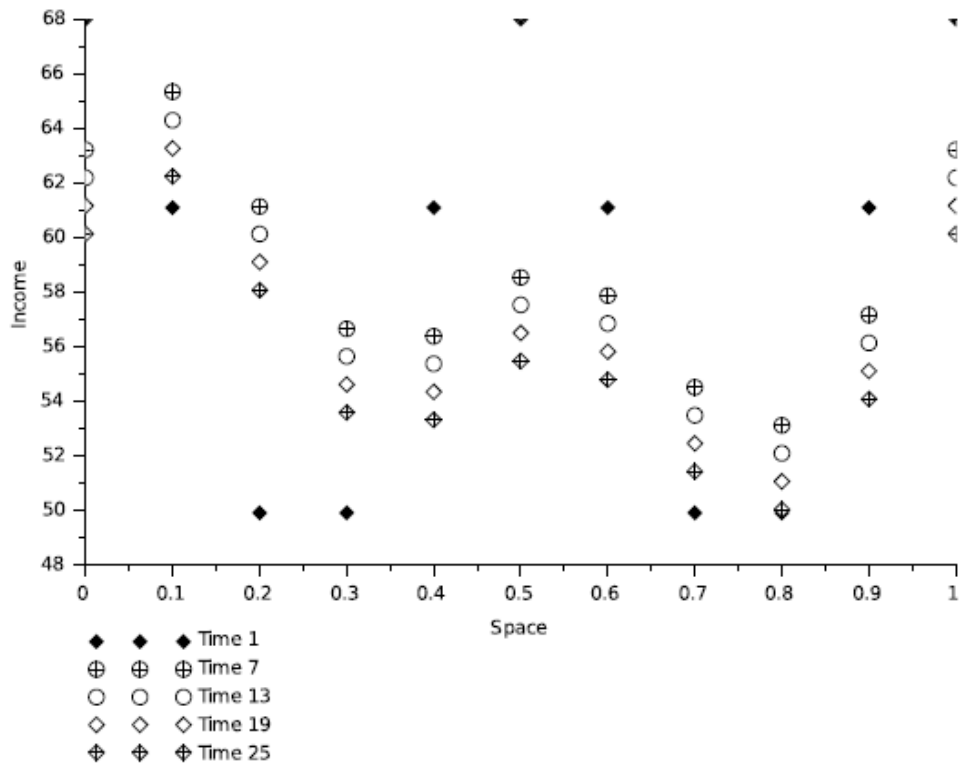
L'évolution dans le temps des revenus des différents facteurs de production sont représentés dans les figures 3 à 6. Comme il est mentionné plus haut, il existe des conditions initiales pour lesquelles il n'y a pas de solution au problème [3]. Nous avons ici fait un choix de conditions initiales qui assurent l'existence de solution à chaque itération, pour un nombre total d'itérations suffisamment grand.



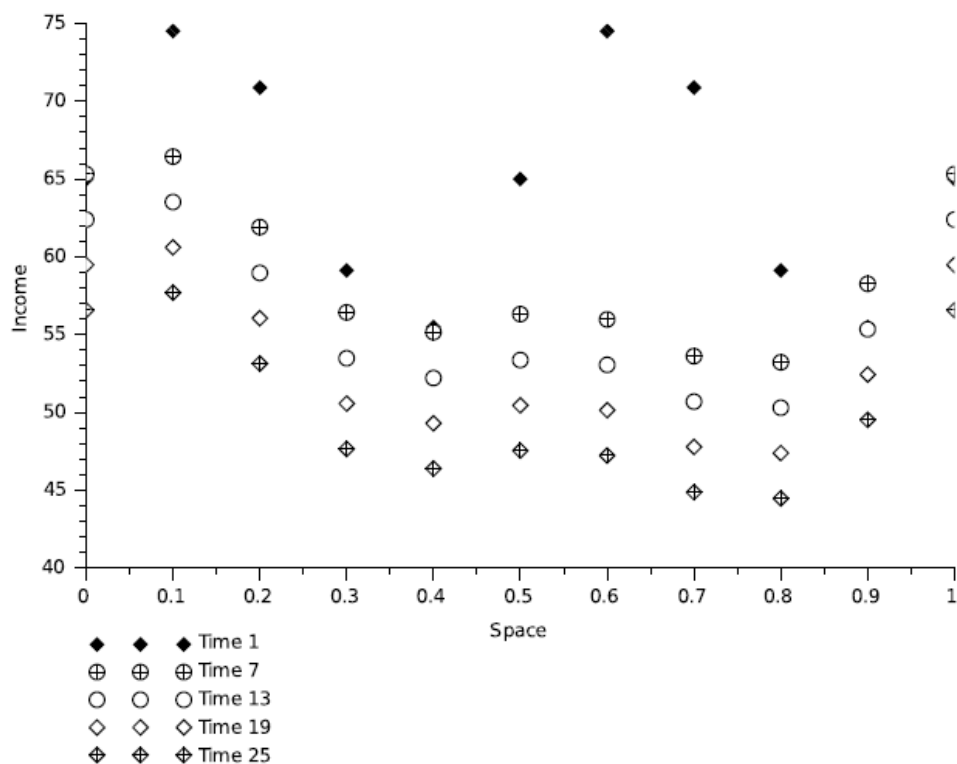
**Fig. 3.** Le revenu du facteur 1 (capital financier) dans différentes firmes distribuées sur l'espace [0.1] aux temps 1, 7, 13, 19 et 25.



**Fig. 4.** Le revenu du facteur 2 (profit du capital productif) dans différentes firmes distribuées sur l'espace [0.1] aux temps 1, 7, 13, 19 et 25.



**Fig. 5.** Le revenu du facteur 3 (salaire des travailleurs qualifiés) dans différentes firmes distribuées sur l'espace [0,1] aux temps 1, 7, 13, 19 et 25.



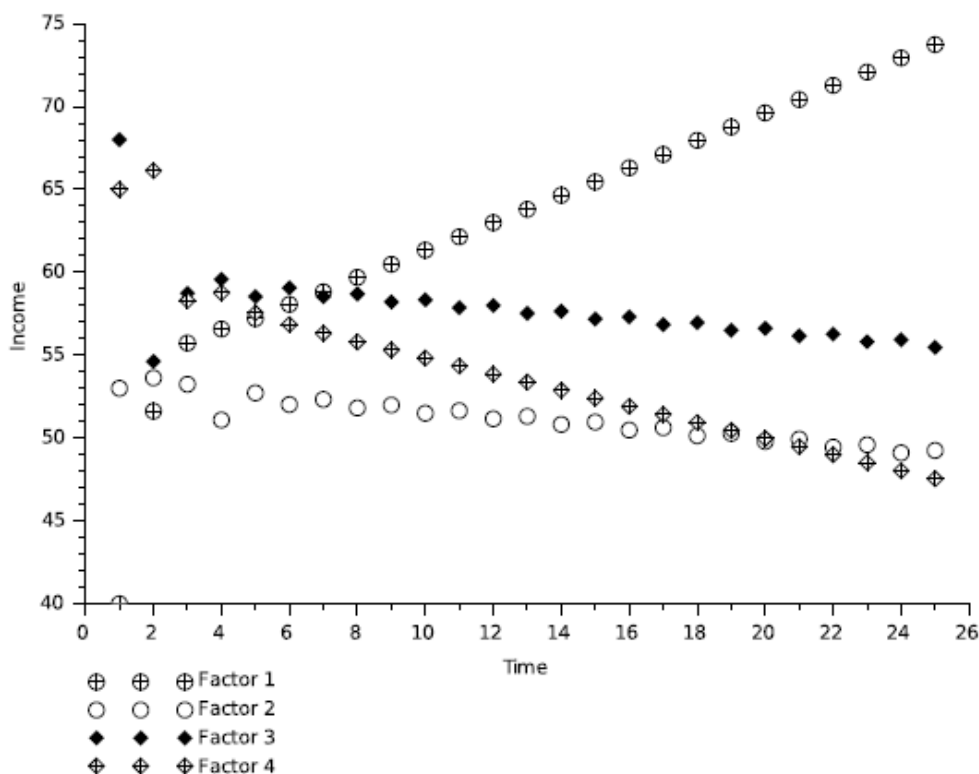
**Fig. 6.** Le revenu du facteur 4 (salaire des travailleurs non qualifiés) dans différentes firmes distribuées sur l'espace [0,1] aux temps 1, 7, 13, 19 et 25.

#### 4. Discussion

Nous pouvons constater que les revenus du facteur 1, dont le coût de mobilité est très faible, s'accroît alors que la valeur ajoutée totale reste constante à travers le temps (Fig 2 et 3). Cela signifie que dans chaque firme, une part croissante de la valeur ajoutée est attribuée aux actionnaires. On observe également que le niveau de revenu de ce facteur est relativement homogène dans l'espace, alors que les revenus initiaux sont disparates (Fig 3). De façon symétrique, le salaire des travailleurs non qualifiés, dont le coût de mobilité est très élevé (et la capacité de marchandage réduite) diminue à chaque période quel que soit la firme. Cette diminution est d'autant plus prononcée que la valeur ajoutée de la firme est faible (Fig 2 et 6).

Pour le facteur 3, le même phénomène se produit mais il est moins prononcé (Fig 5). Les profits du facteur 2 augmentent quant à eux légèrement au cours du temps (Fig. 4). On peut souligner que le modèle génère des revenus très différents en fonction de la localisation des facteurs dans l'espace.

Illustrons à présent la dynamique des revenus au sein d'une firme donnée (Fig 7).



**Fig. 7.** Dynamique des revenus dans la firme située en 0.6.

Bien que le revenu du facteur 1 est initialement très faible, celui-ci augmente de façon conséquente dans le temps. Pour les autres facteurs, c'est l'inverse qui se produit : la décroissance est régulière pour les facteurs 3 et 4, mais elle se stabilise pour le capital productif (facteur 2). La dynamique des revenus de chaque facteur reflète les différences dans les coûts de mobilité et les capacités de marchandage. Après plusieurs itérations, les revenus des facteurs s'ordonnent de façon inverse aux coûts de mobilité, même si ce n'est pas le cas



initialement (Fig 5). Cette conclusion reste valable pour une grande variété de conditions initiales. Afin d'illustrer la robustesse de cette dynamique, nous avons fait le choix de présenter des simulations dans lesquelles les conditions initiales sont opposées à cette tendance (les revenus initiaux choisis des facteurs n'étant pas ordonnés selon leur coût de mobilité).

La différence dans les coûts de mobilité explique donc les inégalités croissantes de la répartition des richesses, à la fois dans le temps et dans l'espace.

Ajoutons que les revenus de chaque facteur évoluent de façon linéaire après un régime transitoire (ici, autour de 8 itérations). La pente peut être positive ou négative. Plus le coût de mobilité est faible, plus la pente est importante. Nous conjecturons que la pente de ces droites ne dépend que du coût de mobilité et non des conditions initiales. Asymptotiquement, les revenus des différents facteurs évoluent linéairement. En conséquence, les revenus dont le coût de mobilité est le plus important finissent par s'annuler à partir d'un certain temps. C'est pourquoi nous nous limitons à 25 itérations.

Ajoutons quelques remarques:

- (i) quand le coût de mobilité est très faible, les revenus deviennent rapidement homogènes dans l'espace, ce qui illustre la loi du prix unique de Cassel [1918].
- (ii) Dans les firmes ayant la plus faible valeur ajoutée, le salaire des travailleurs qualifiés ou non diminue plus rapidement.

## **Conclusion**

Pour illustrer le phénomène de répartition inégalitaire de la valeur ajoutée, le modèle présenté dans cet article formule une négociation de type Nash spatialisé et dynamisé : chaque type d'agent négocie son revenu en fonction de sa position dans l'espace, de ses coûts de déplacements (déterminant sa vitesse de mobilité), et du revenu obtenu à la période précédente. On suppose qu'à chaque période, la négociation se reproduit. On obtient le résultat selon lequel lorsque le temps passe, les inégalités spatiales de revenus pour un même type d'agent s'atténuent d'autant plus que les coûts de déplacements sont faibles. Mais surtout, la vitesse de mobilité de chaque agent, mesurée ici par les coûts de déplacement, permet d'expliquer les différences d'évolution des revenus entre types d'agents. Du point de vue de la politique économique, cela signifie qu'une modification du partage de la valeur ajoutée peut passer par une modification des coûts de déplacements et des entraves à la mobilité pour chaque facteur.

## **Bibliographie**

Binmore K., Rubinstein A., Wolinsky A., [1986], « The Nash Bargaining Solution in Economic Modelling », *Journal of Economics*, vol. 17(2), pp. 176-188, Summer.

Bruno M. and Sachs J., [1985] *Economics of Worldwide Stagflation*, Harvard University Press, Cambridge.

Bargain O., Moreau N., [2005], « Cooperative models in action: simulation of a Nash-bargaining model of household labor supply with taxation », GRAMAQ Working Paper.

Cassel, G., [1918] « Abnormal Deviations in International Exchanges », *Economic Journal*, 28, 413-15.

Clark A., Couprie H., Sofer C., [2004], « La modélisation collective de l'offre de travail », *Revue économique*, vol 55, n°4, pp. 767-789.

Cotis J.P, [2008], *Partage de la valeur ajoutée, partage des profits et écarts de rémunération en France*, Rapport au Président de la République, 13 mai.

Donni O.,[2003], « Collective household labor supply: Non-participation and income taxation », *The Journal of Public Economics*,

Godechot, O. [2008] « Hold-up' in Finance: The Conditions of Possibility for High Bonuses in the Financial Industry», *Revue française de sociologie*, 49, pp. 95-123.

Layard, R., Nickell, S.J., and Jackman R. [1991] *Unemployment*, Oxford University Press, Oxford.

Manser M., M. Brown [1980], «Marriage and Household Decision-making: A Bargaining Analysis», *International Economic Review*, 21, pp. 31-44.

McElroy M.B., Horney M. J, [1990]: « Nash-bargained household decisions: reply»,*International Economic Review*, 31, pp. 237-240.

Nash, J. [1950], « The Bargaining Problem», *Econometrica*, 18, pp. 155-62.

Nash, J. [1953], « Two-Person Cooperative Games», *Econometrica*, 21(1), pp. 128-40.

Nickell, S.J. and Andrews, M. [1983], « Unions, Real Wages and Employment in Britain 1951-79 », *Oxford Economic Papers*, 35, supplement, pp. 183-206.

Rubinstein A, [1982], « Perfect Equilibrium in a Bargaining Model », *Econometrica* **50** (1): 97-109

Rubinstein A., [1985], « A bargaining model with incomplete information about Time preferences », *Econometrica*, 53, 5, pp. 1151-1172.

Rubinstein A., Wolinsky A., [1985], « Equilibrium in Market with sequential bargaining », *Econometrica*, 53, 5, pp. 1133-1150.

Rochet J.C, [1988], « Théorie de la négociation: une sélection de quelques résultats récents », *Annales d'économie et statistiques*, n°12, pp.2-25.

### **Annexe mathématique (preuve de la solution analytique)**

Posons :

$$x^k = \frac{W^k - \theta_i^k(t)}{V_i(t+1) - \sum_{k=1}^K \theta_i^k(j)}$$

Le problème [3] est équivalent au problème :

$$\{x^1, \dots, x^K\} = \text{Arg max}_{\{x^k\}_k} f(x^1, \dots, x^K) [5]$$

où

$$f(x^k) = (1 - \sum_{k=1}^{K-1} x^k) \prod_{k=1}^{K-1} x^k$$

sous la contrainte  $x^k \geq 0$  pour tout k.

Pour résoudre le problème [5], on calcule :

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^1, \dots, x^K) = -\prod_{k=1}^{K-1} x^k + (1 - \sum_{k=1}^{K-1} x^k) \prod_{k=1, k \neq j}^{K-1} x^k = \prod_{k=1}^{K-1} x^k \left[ \frac{1}{x_j} (1 - \sum_{k=1}^{K-1} x^k) - 1 \right]$$

Donc :

$$\nabla f = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1, k \neq j}^{K-1} x^k + 2x_j = 1 \Leftrightarrow (I_{K-1} + U_{K-1, K-1})X = U_{K-1, 1}$$

Où  $I_{K-1}$  est la matrice identité de  $\square^{K-1}$ ,  $X = (x^1, \dots, x^K)^T$  et  $U_{K-1, h}$  la matrice avec  $K-1$  lignes et  $h$  colonnes. Comme  $\text{Det}(I_{K-1} + U_{K-1, K-1}) \neq 0$ , c'est un système de Cramer avec une unique solution  $x_k = 1/K$  pour tout  $k$ . En revenant à la variable d'origine, on retrouve le résultat à prouver.